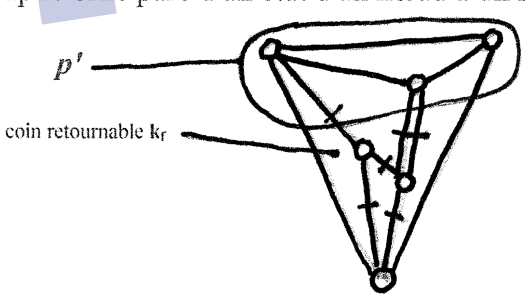
transitions virtuelles entre états nœudiens

I – transitions entre états nœudiens

a – différentiel des motifs retournables

voici le graphe orné paré d'un état d'un nœud à un rond et onze croisements.



sa table d'état s'écrit[1] : $\eta = $

	w	w'
p	3	3
p'	2	3

chaque parure est le circuit fermé, en un ou plusieurs tenants, qui pare les arêtes que l'autre ne pare pas. la parure p' est la parure *faufilante*. la parure p est la parure *sinuante* qui longe les arêtes. elle n'est donc pas dessinée autrement que par les arêtes elles-mêmes qu'elle pare. la formule d'état de l'état s'écrit :

$$\eta = (3p\mathrm{w} + 3p'\mathrm{w}')_t + (3p\mathrm{w}' + 2p'\mathrm{w})_{t'},\ \text{soit}^2\ \ dt = |6t - 5t'| = 1.$$

cet état recèle un coin retournable, qui se présente sur le graphe comme coin face, que nous notons $\mathbf{k}_f$.

la table d'état du coin retournable $\mathbf{k}_f$, portion de la table d'état complète, est : $\mathbf{k}_f = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix}$
l'épingle *retournante 11* est donc visible en p'.

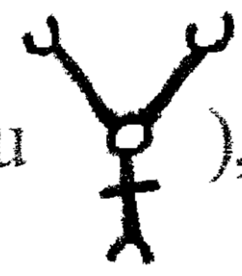
---

[1] les parures p, p' et les ornures w, w' sont ici représentées afin d'expliciter entièrement la table.
[2] dt donne la différence des tournures t, t' de l'état, avec t ici grisée. t est la tournure de l'amas dans lequel se situe l'état dessiné. c'est un invariant d'amas. cf. ***plastique des nœuds rares, paris 1992.***

lors du retournement, l'épingle *11* passe de p' en p en inversant ses valeurs, mais ici, comme elles sont égales, cela ne se voit pas. il faut vérifier cette inversion avec des épingles dont les valeurs sont distinctes. mais quand même, le *1* de p'w devient *1* en pw' et le *1* de p'w' devient *1* en pw. la table d'un coin retournable **k** se retourne donc en table d'état $\mathbf{k}^*$ selon le schéma :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \leftrightarrow \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$$

et à un motif retournable **face** correspond un retourné **sommet** et réciproquement. ce qui fait que $\mathbf{k}_f = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ se retourne en $\mathbf{k}_s^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ et réciproquement.

en outre la morphologie du graphe change aussi, le Δ  (ou ) devient Y  (ou ), et réciproquement. à partir de l'état de départ, avec les conventions

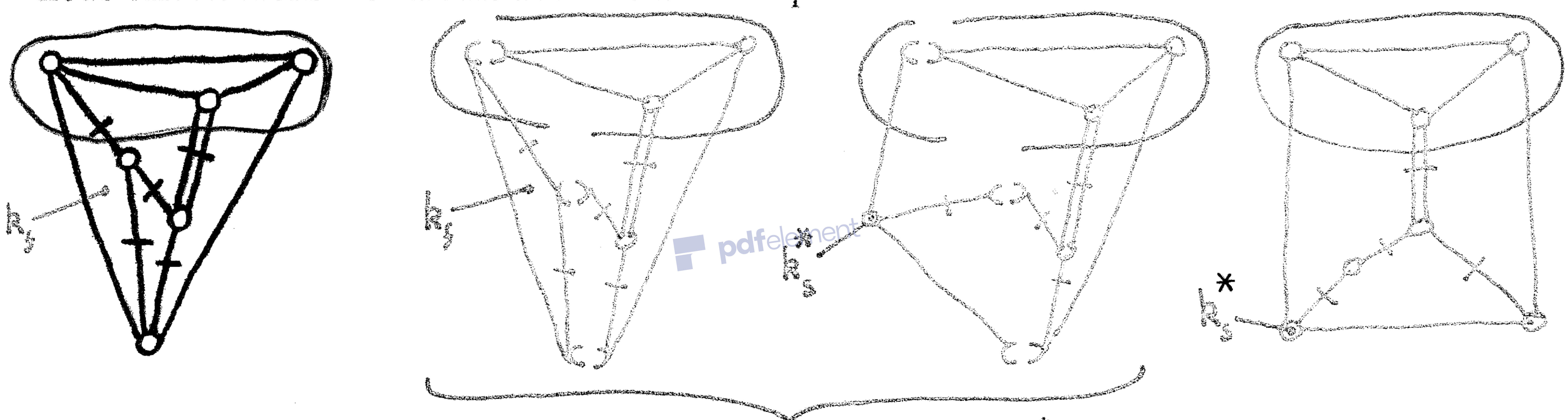
état de départ = η_d
état d'arrivée = η_a
motif de métamorphose de départ = m_d
motif retourné à l'arrivée = $m_a = m_d^*$

l'état d'arrivée se calcule comme suit :

$$\eta_a = (\eta_d - m_d) + m_d^* = \eta_d + (m_a - m_d) = \eta_d + \delta_m$$

où $\delta_m = m_a - m_d$. c'est le *différentiel* des motifs. **attention!**, le *différentiel* n'est pas commutatif car il est **vu** à partir de l'état d'arrivée.

nous effectuerons les calculs avec les dessins qui suivent.



différentiel des motifs de métamorphose $\delta_k = \mathbf{k}_s^* - \mathbf{k}_f$

η_d η_d − motif de départ $\mathbf{k}_f$ + motif arrivée $\mathbf{k}_s^*$ $= \eta_a$

1) $\eta_d = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\mathbf{k}_f = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

3) $\mathbf{k}_s^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ retourné de $\mathbf{k}_f$.

4) $\delta_k = \mathbf{k}_s^* - \mathbf{k}_f$. δ_m se calcule comme en calcul matriciel[3], soit :

$$\delta_m = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d-a & c-b \\ b-c & a-d \end{vmatrix}$$

soit, avec $u = a - d$ et $v = b - c$: $\delta_m = \begin{vmatrix} -u & -v \\ v & u \end{vmatrix}$

---

[3] les tables d'états **ne sont pas** des matrices, bien qu'elles leur ressemblent. en tant que collectes descriptives de nombres, ceux des croisements parés ornés de l'état concerné, les opérations de soustraction et d'addition, seules opérations qui nous intéressent ici, s'y appliquent simplement. ces opérateurs **numériques** correspondent en réalité, respectivement au *décrochage* et à l'*accrochage* ***topologiques*** sur le graphe d'état.

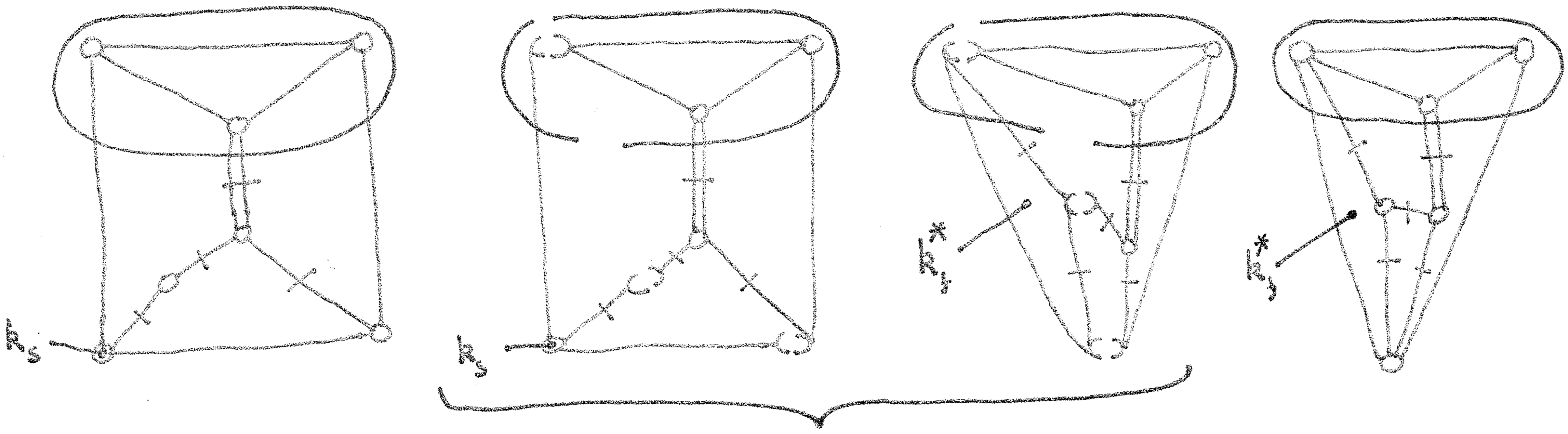
donc ici[4] $\delta_k = \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

5) $\eta_a = \eta_d + \delta_k$. ici : $\eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

ce qui est effectivement ce que les dessins montrent. la formule d'état de l'état est :

$$\eta = (4\boldsymbol{pw} + 2\boldsymbol{p'w'})_t + (3\boldsymbol{pw'} + 2\boldsymbol{p'w})_{t'}, \text{ soit } d\boldsymbol{t} = |6t - 5t'| = 1.$$

effectuons les prévisions en sens inverse



différentiel des motifs retournables $\delta_k = \mathbf{k_f}^* - \mathbf{k_s}$

η_d | η_d – coin retournable sommet $\mathbf{k_s}$ | + coin retourné face $\mathbf{k_f}^*$ | $= \eta_a$

1) $\eta_d = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

2) $\mathbf{k}_s = \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

3) $\mathbf{k}_f^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix}$

4) $\delta_k^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

qui est l'opposé du précédent.

les *différentiels* opposés des motifs métamorphosables mutuellement retournables – coins ou agrafes retournables – sont tels que leur somme *est* **toujours nulle**, $\delta = \delta_k + \delta_k^* = 0$, *ce qui exprime* l'**involution** *des métamorphoses*. dans notre exemple, nous obtenons, en resserrant l'écriture :

$$\delta = \delta_k + \delta_k^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et 5) $\eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$

ce qui est bien l'état de départ antérieur.

les motifs d'arrivée et de départ au *premier* retournement voient naturellement leur situation s'inverser lors du *deuxième* retournement. $m_a = m_d^*$ est le retourné de m_d au *premier* retournement et $m_d = m_a^* = m_d^{**}$ au *second*. on peut donc écrire : $\delta = \delta_k + \delta_k^* = (m_d^* - m_d) + (m_a^* - m_a) = (m_a - m_d) + (m_d - m_a) = 0$.

b – catastrophe différentielle

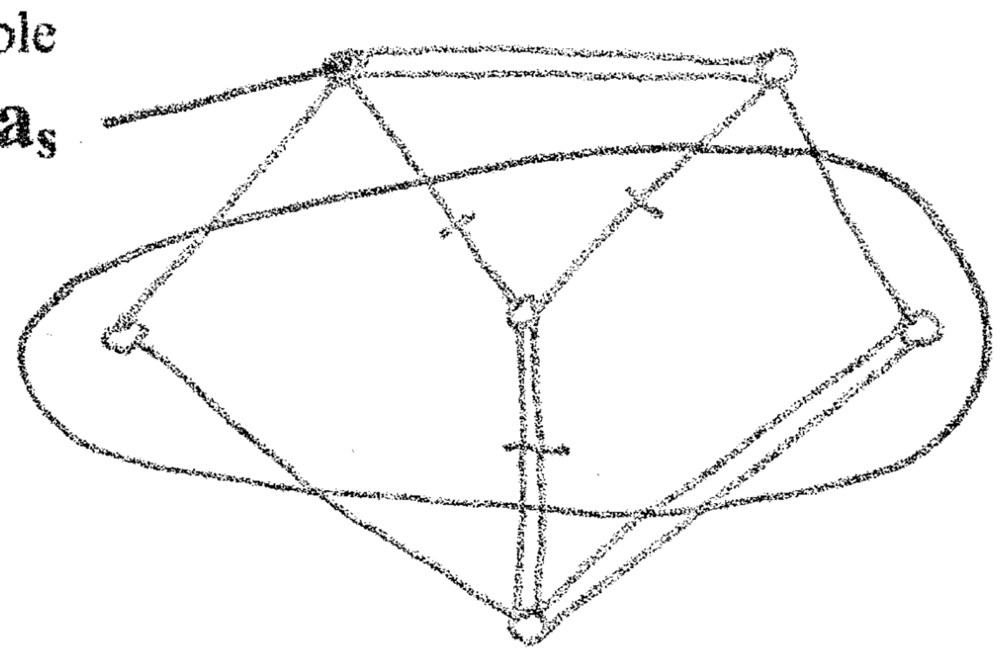
1) anomalies de parures

tout cela a l'air très régulier, et cela fonctionne effectivement jusqu'au moment où l'on débouche sur un état de ce genre, du même amas :

---

[4] un moyen mnémotechniquement simple de se souvenir de la formule du *différentiel* : il suffit de l'écrire à partir de la procédure : $\delta_m = [3] - [2]$.

agrafe retournable
sommet $\mathbf{a_s}$



$$\eta = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

dont la formule d'état est :

$\eta = (2p\mathrm{w} + 4p'\mathrm{w}')_t + 5p'\mathrm{w}t'$, soit d$t = |6t - 5t'| = 1$, et dans lequel $\mathbf{a}_s$ est une agrafe sommet retournable telle que $\mathbf{a}_s = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix}$ dont le retourné est $\mathbf{a}_f^* = \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ suivons notre procédure :

1) $\eta_d = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$

2) $\mathbf{a}_s = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix}$

3) $\mathbf{a}_f^* = \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

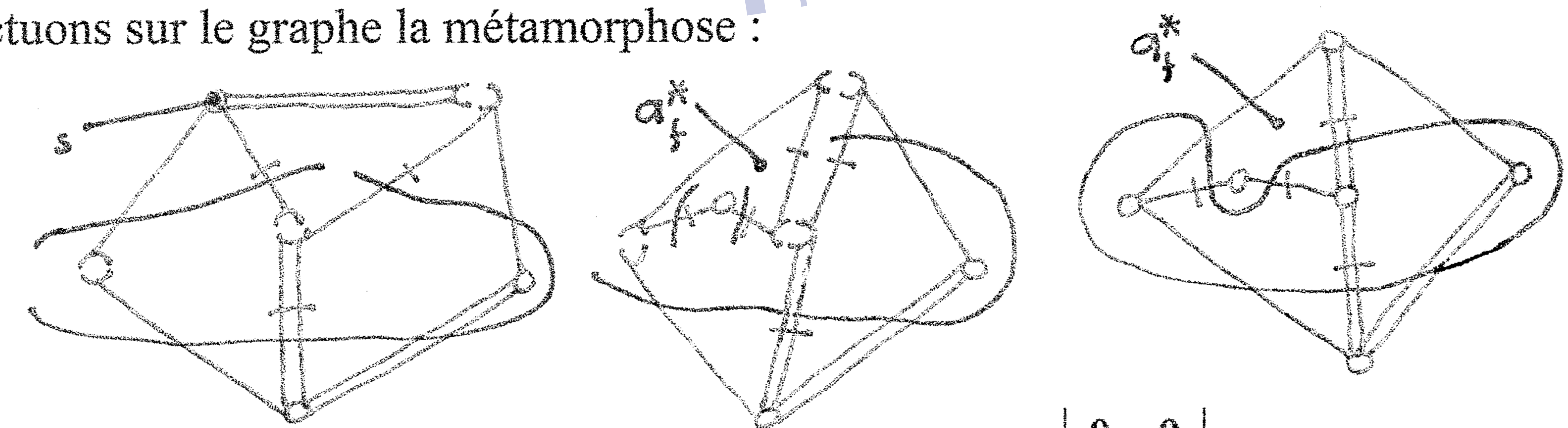
4) $\delta_a = \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \mathit{1} & \mathit{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

5 – $\eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$

dont la formule d'état est :

$\eta = (p\mathrm{w} + 5p'\mathrm{w}')_t + (p\mathrm{w}' + 4p'\mathrm{w})_{t'}$, soit d$t = |6t - 5t'| = 1$.

effectuons sur le graphe la métamorphose :



or, nous observons que sur le dernier graphe, $\eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$ dont la formule d'état est :

$\eta = 6p'\mathrm{w}'t - 5p'\mathrm{w}t'$, soit d$t = |6t - 5t'| = 1$, et non $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$

que s'est-il passé ? nous voyons que l'agrafe retournée qui aurait dû valoir $\mathbf{a_f}^* = \begin{vmatrix} \mathit{1} & \mathit{1} \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ vaut en réalité[5] $\mathbf{a_f}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

lors du retournement, l'épingle *retournante 11* de l'agrafe retournable doit (1) - quitter sa parure $\boldsymbol{p'}$ pour devenir $\boldsymbol{p}$, pendant que la lunule faisceau de cette même agrafe quitte sa parure $\boldsymbol{p}$ pour devenir une lunule ribambelle $\boldsymbol{p'}$. cependant (2) - l'épingle *retournante* doit former par son arête **w'** une lunule faisceau avec une autre arête **w'** de l'état, ce qui est conforme, mais qui est *déjà* $\boldsymbol{p'}$. il y a donc contradiction entre le changement de parure que l'épingle *retournante*

[5] l'épingle retournante *11* de ce motif n'apparaît pas car elle se confond avec les deux autres croisements de la lunule de l'agrafe.

doit connaître par le retournement, et sa conjonction en lunule avec une arête qui serait ainsi de l'**autre** parure. j'appelle ***catastrophe différentielle*** une telle situation.

2) différentiels réels, différentiels virtuels

a) le *différentiel* **réel** est la différence entre le motif **réellement obtenu** et non *prévu* par la procédure, présent dans l'état – sans tenir compte de notre procédure formelle actuelle, ne prenant en compte que la **réalité physique** de l'état nœudien –, et le motif de départ, soit $\tilde{\delta}_m = \tilde{m}_a - m_d$. ici :

$$4')\ \tilde{\delta}_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5')\ \eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

ce qui est bien l'état **réel obtenu**. il est donc **dessinable**. où l'on voit que l'état d'arrivée respecte la procédure quelle que soit la valeur du motif métamorphosable.

b) le *différentiel virtuel* est la différence entre le motif *prévu* et **non obtenu** selon la procédure, et le motif de départ. soit $\delta_m^* = m_d^* - m_d = m_a - m_d$. soit ici :

$$4'')\ \delta_a^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5'')\ \eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

l'état obtenu *n'est pas réel*, il n'est donc *pas dessinable*.

3) déficits et défauts

a) reprenons les formules des *différentiels* **réels** et *virtuels* : $\tilde{\delta}_m = \tilde{m}_a - m_d$ et $\delta_m^* = m_a - m_d$. nous pouvons écrire $m_d = \tilde{m}_a - \tilde{\delta}_m = m_a - \delta_m^*$ d'où l'on tire $\tilde{m}_a - m_a = \tilde{\delta}_m - \delta_m^*$. cette différence des *différentiels* représente le ***déficit*** entre les transitions.

dans notre exemple, il vient : $d_\delta = \tilde{\delta}_a - \delta_a^* = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) le ***défaut*** de transition entre les deux états liés par la métamorphose est la différence entre le retourné **obtenu** et le retourné *prévu*. il est égal à : $d_m = \tilde{m}_a - m_d^* = \tilde{m}_a - m_a$, et donc égal au ***déficit*** entre les transitions $d_\delta = \tilde{\delta}_m - \delta_m^*$. dans notre exemple, nous obtenons :

$$d_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

le ***déficit*** entre les transitions est égal au ***défaut*** de transition entre états. cette égalité qui montre que le ***déficit*** n'est fonction numérique que des motifs de retournement facilite le calcul. il est à noter que les valeurs numériques qui apparaissent, notamment négatives, ne représentent pas de réelles portions d'état d'un nœud.

effectuons la métamorphose inverse d'après notre procédure :

$$1 - \eta_d = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

$$2 - \mathbf{a}_f = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3 - \mathbf{a}_s^* = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$4 - \delta_a = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$5 - \eta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$